MATEMATICA ZEILOR
ȘI ALGORITMII OAMENILOR

Paolo Zellini e profesor de analiză numerică la Universitatea „Tor Vengata“ din Roma. Preocupat de raportul matematicii cu filozofia și științele naturii, Zellini a mai publicat: *Scurtă istorie a infinitului* (1980), *Revolta numărului* (1997), *Gnomon. Un studiu asupra numărului* (1999), *Număr și logos* (2010)

PAOLO ZELLINI

MATEMATICA ZEILOR ȘI ALGORITMII OAMENILOR

Traducere din italiană de
Liviu Ornea

HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Vlad Zografi
Coperta: Ioana Nedelcu
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
Corector: Grigore Vida
DTP: Dragoș Dumitrescu, Dan Dulgheru

Tipărit la Art Group

Paolo Zellini
La matematica degli dèi e gli algoritmi degli nomini

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Zellini, Paolo
Matematica zeilor și algoritmii oamenilor / Paolo Zellini;
trad.: Liviu Ornea. - București: Humanitas, 2018
ISBN 978-973-50-6248-4
I. Ornea, Liviu (trad.)
51

EDITURA HUMANITAS
Piața Presei Libere 1, 013701 București, România
tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro
Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro
Comenzi telefonice: 021/311 23 30

Introducere

Despre ce realitate ne vorbește matematica? Opinia curentă e că matematicienii se ocupă de formalisme abstracte care doar din rațiuni de neexplicat se aplică în toate domeniile științei. Concepem entități imateriale care ulterior par destinate să definească modele ale unor fenomene care chiar au loc în lume. De o parte stau lucrurile reale, cele care „se întâmplă“; de cealaltă parte sunt conceptele matematice, creații ale minții noastre, care ne stimulează comportamentul într-un mod mai mult sau mai puțin eficient. Cu siguranță, faptul că nu cunoaștem adevăratele motive ale forței descriptive a formulelor și ecuațiilor nu ne ajută să lămurim motivațiile raționamentului matematic. Așa se vede, până la urmă, validată ideea că matematicienii nu sunt interesați să se ocupe de lumea reală, iar matematicile continuă să se prezinte ca o știință care elaborează operații ingenioase cu reguli și concepte care par inventate cu unicul scop de a fi respectate întocmai[1]. Prea puțin contează că unele idei au fost sugerate de observarea fenomenelor naturale; operațiile produc repede concepte avansate și complexe care se detașează de realitatea observabilă și care, în final, confirmă imaginea strâmbă a unei matematici ca pur joc lingvistic ori ca formalism gol.

Totuși, dacă ne întoarcem la istoria sa îndepărtată și la motivațiile ei cele mai profunde, matematica apare orientată diferit de cum e percepută în mod obișnuit. Izvoarele ne fac să înțelegem că aritmetica și geometria din vechime începuseră să-și asume sarcina nu atât de a descrie sau de a simula lucruri reale, cât de a oferi o fundamentare a însăși realității lumii din care și ele făceau parte. Tocmai entitățile concrete, acelea cel mai direct și nemijlocit perceptibile, erau schimbătoare și apăreau deci ca ireale. În numere, în schimb, în raporturile și în figurile geometriei era de găsit ceea ce le sustrăgea instabilității și evanescenței.

Dacă ne gândim la celebrele paradoxuri ale lui Zenon, la numerele-puncte ale pitagoreicilor și ale atomiștilor antici, la filozofia matematică a lui Platon, la descoperirea incomensurabilității și la semnificația conceptului de raport (*lógos*), la calculele babilonienilor și la matematica vedică, ne aflăm în fața unui corpus grandios de cunoștințe care laolaltă aduc la lumină partea cea mai lăuntrică și invizibilă, dar și cea mai reală, a entităților existente în natură. Dar orientarea aceasta nu aparține doar matematicii antice. Teoria numerelor și a continuului aritmetic elaborată în secolul XIX se afirma ca o continuatoare ideală a vechii școli pitagoreice și a viziunii sale despre lume inspirate de un principiu de realitate atomistă. Matematicienii din vremea aceea continuau să susțină că toate construcțiile lor simbolice corespund unor entități cât se poate de reale, iar senzația cea mai răspândită era că de succesul teoriilor lor depindea fundamentul necesar înțelegerii lumii. Atunci când bazele acelor teorii, în prima parte a veacului al XX-lea, au devenit nesigure și au început să treacă printr-o revizuire critică, matematica a fost obligată să caute rațiunile care dau cu adevărat concretețe unui sistem de calcul și ne fac să avem încredere în el.

A început atunci să circule printre matematicieni un cuvânt cheie – *algoritm* – care denumea nu atât o formulă abstractă, cât un proces efectiv[2]. Procesul trebuia să se desfășoare într-un număr finit de pași, în spațiu și timp, pornind de la o mulțime de date inițiale până la un rezultat final, potrivit modalităților prevăzute de o mașină. Definițiile formale ale algoritmului, bazate pe recursivitate, pe mașina Turing ori pe alte formalisme, urcă în timp până în anii '30 ai secolului trecut, dar primele avertismente că tocmai conceptul de algoritm era menit să moștenească sensul realității matematice, adică sensul a tot ce consideră matematicienii drept real și efectiv, se înregistrează deja în primul deceniu al secolului trecut, la precursorii intuiționismului matematic și în primele argumente cu care Émile Borel înfrunta paradoxurile semantice și primele semne ale crizei fundamentelor.

Știința algoritmilor a avut o dezvoltare tumultuoasă în întreg secolul XX. Punctul culminant s-a înregistrat în definițiile formale din anii ’30 după care, urmare a construcției primelor calculatoare digitale, s-a produs separarea în două filoane complementare și relativ opuse: de o parte informatica teoretică, dimpreună cu o teorie abstractă a calculabilității și a complexității calculului, de cealaltă parte o știință a calculului la scară mare, având sarcina să rezolve problemele fizicii matematice, ale economiei, ale ingineriei sau ale informaticii în termeni pur aritmetici și numerici. Numeroasele implicații filozofice ale acestui al doilea filon nu au fost încă suficient lămurite, dar deja e evident, o simte oricine, cât de adânc a pătruns, în toate sectoarele vieții, ale culturii și în organizarea socială această multiplicare a unei varietăți de procese de calcul menite să rezolve probleme specifice extrem de diverse.

În calculul numeric la scară mare, *eficacitatea* teoretică a algoritmilor tinde să devină *eficiență* computațională. Iar azi pare deja limpede că, pentru a fi *reale*, chiar entitățile matematice construite cu ajutorul unui proces de calcul trebuie să poată fi gândite în același mod, ca algoritmi eficienți. Acum, eficiența depinde mai ales de modul în care cresc complexitatea calculului și eroarea care depinde în mod special de *cât de repede cresc* numerele pe parcursul calculului.

Motivele creșterii numerelor sunt strict matematice și le putem înțelege numai folosind teorii relativ avansate. Dar e util să observăm că motivul creșterii, în orice aspect al său, a suscitat deja atenția anticilor și tocmai modul în care e tratată creșterea mărimilor în geometria greacă, în calculele vedice și în matematica mesopotamiană ne ajută să înțelegem cauzele creșterii numerelor în algoritmii moderni. Motivul e pe cât de simplu, pe atât de surprinzător: unele *scheme de calcul* importante au rămas neschimbate din acea vreme și până azi, când apar în cele mai complexe strategii pe care le utilizează calculul la scară mare.

Din ce anume provin acele scheme? În unele cazuri foarte relevante pentru știința modernă, izvoarele vorbesc limpede: acele scheme provin dintr-o combinație extrem de specială de proiect uman și principiu divin. În India vedică, altarele lui Agni aveau forme geometrice complexe și trebuiau să poată fi mărite de o sută de ori fără a-și schimba forma, cu tehnici specifice care se regăsesc și în geometria greacă, și în calculul mesopotamian. În Grecia, se putea întâmpla – de pildă, în cazul duplicării cubului – ca multiplicarea unei figuri să fie cerută de un zeu. Dar multiplicarea figurii geometrice era strâns legată de algoritmii cu care se aproximau acele numere iraționale care apar atunci când se măsoară mărimi geometrice precum diagonala unui pătrat de latură unu ori raportul dintre o circumferință și diametrul său. Cu mult înainte de zeul lui Descartes, cei care au asigurat legătura între concepțiile misticilor și natură, între sfera noastră cea mai intimă și realitatea externă au fost zeii vedici și cei greci. Și pe vremea aceea principiul unei asemenea legături posibile era matematica. În orice caz, modalitățile de creștere în geometria antică, sugerate de zeu, se reflectă azi în creșterea numerelor în calculele digitale, influențând în mod fundamental stabilitatea calculului și puterea de predicție a modelelor matematice. Într-adevăr, modalitățile de creștere a figurilor geometrice, în particular a pătratului, sunt adesea corelate cu proceduri *numerice* care generează fracții p/q care aproximează numere iraționale, unde p și q sunt numere întregi. Dar de obicei p și q cresc cu atât mai repede cu cât e mai rapidă convergența metodei, cu eventuale efecte negative asupra preciziei și a stabilității întregului proces de calcul.

Teza conform căreia numerele iraționale sunt entități reale, cu un statut ontologic de același fel cu al numerelor întregi, a fost o cucerire a matematicii sfârșitului de secol XIX și a modului în care s-a definit atunci conceptul aritmetic de continuu. Dar dezvoltarea științei algoritmilor și a calculului digital în secolul trecut a devenit expresia unei alte opoziții: un fel de ultim act al acelei tensiuni perene dintre numere și geometrie, dintre discret și continuu către care trimiteau celebrele paradoxuri ale lui Zenon. Se poate vorbi despre opoziție, deoarece studiul algoritmilor a fost înlesnit, din chiar primii ani ai secolului trecut, de un concurs de idei orientate înspre reevaluarea aspectelor mai realiste și constructive ale matematicii, în antiteză cu acele abstracțiuni din care se născuseră paradoxurile și criza fundamentelor: pe de o parte, autoritatea matematicianului francez Émile Borel, care semnala importanța definirii obiectelor matematice prin construcții algoritmice; pe de altă parte, sciziunea dramatică operată de L.E.J. Brouwer și de intuiționismul matematic în interiorul ansamblului matematicii. Susținând că un număr există numai dacă e construit, Brouwer a dezlănțuit un atac general asupra sistemului științific predominant la acea dată, punând la îndoială înseși definițiile fundamentale ale analizei clasice.

Filozofiile constructiviste, care se bazează pe o idee de calculabilitate efectivă, au atribuit o nouă preeminență tocmai procesului care părea exterior vocației abstracte a matematicii, anume au dat importanță operației concrete, acțiunii naturale și, până la urmă, procesului computațional care se desfășoară în interiorul unei mașini în limitele convenite de spațiu și timp. Dar e la fel de evident că strategii computaționale importante sunt modelate pe aceleași scheme pe care oamenii le-au elaborat în timpuri în care ei se găseau în strânsă legătură cu zeii. Din necesități rituale, în India vedică și, la fel, în Grecia, motivul creșterii mărimilor avea o importanță fundamentală și trebuia atacat cu metode matematice. Iar schemele aproximative pentru a face să crească o mărime a unei forme geometrice încă pot fi decelate în formule ale matematicii computaționale foarte avansate. Schemele nu s-au schimbat, dar au fost cu siguranță amplificate și perfecționate cu ajutorul unor teorii matematice complexe. Tocmai din aceste teorii derivă și rațiunea eficienței și a capacității lor efective de a traduce modelele matematice ale naturii în informație digitală pură.

Procesul computațional însuși, articulat într-o miriadă de operațiuni concrete automate, se poate desfășura numai grație structurilor matematice abstracte care se inserează mai mult sau mai puțin artificial în calcul. Abstractizarea matematică se combină în mod necesar și sistematic cu materialitatea execuției automate a operațiilor. Calculul e posibil grație presupunerilor teoretice complexe și a unor proprietăți speciale ale numerelor, ale funcțiilor și ale matricelor.

Rămâne așadar deschisă întrebarea: sunt numerele niște entități reale? Iar în caz afirmativ, sunt toate entități reale în același, identic mod? Cele două întrebări trebuie atacate împreună. Istoria ultimului secol și o analiză a conceptelor de număr și de algoritm ne lasă deja să întrezărim o primă concluzie: există specii diferite de numere, care nu au același statut ontologic, dar pentru care se poate argumenta o existență reală din rațiuni diferite și din puncte de vedere diferite. Un criteriu decisiv pentru a stabili realitatea numerelor e modul în care cresc ele în procesele de calcul. Și rațiunile prime ale acestui fenomen sunt de găsit în analiza creșterii mărimilor geometrice elaborată de gândirea antică, cu osebire în matematica greacă, vedică și mesopotamiană.

1

Abstractizare, existență și realitate

De unde vine matematica și care-i sunt scopurile? De ce există triunghiuri, pătrate, cercuri și pentagoane? Ce fel de realitate ori de existență li se poate atribui numerelor? Așa cum uneori precizează până și cei mai intransigenți formaliști, matematica e cunoaștere adevărată, iar obiectul acestei cunoașteri, putem anticipa cu toată încrederea, nu e arbitrar, nu depinde de vreo fantezie capricioasă sau de alegerea schimbătoare a unor anumite axiome sau principii. În plus, se întâmplă adeseori să percepem acest obiect ca o realitate externă, independentă de mintea care-o elaborează.

Ni se pare de obicei că matematica e o știință abstractă tocmai pentru că ea abstrage, pentru a le studia, proprietățile comune ale unor entități particulare, precum numerele, relațiile, figurile, ca și cum proprietățile ar fi, la rândul lor, noi entități care ascultă de legi specifice. Ceea ce are avantajul că tot ce se afirmă despre acestea din urmă poate fi apoi aplicat diverselor entități particulare din care acestea proveniseră prin abstractizare. Atunci când e abstract, raționamentul devine mai general și mai puternic. Dar abstractizarea face mai problematică individualizarea unei *esențe* a entităților matematice, a unei naturi intrinsece pasibilă de a fi definită. Din existența lor, cel puțin ca obiecte ale gândirii noastre, nu pare să derive o realitate a esenței sub forma a ceva stabil și limpede recognoscibil. Nu pare evidentă tradiționala legătură reciprocă dintre *essentia* și *existentia*, care face ca una să nu aibă

Cuprins